

Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC/MCTI

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

PLANO DE ENSINO

Disciplina: GA-033 – Método de Elementos Finitos: Implementação Computacional

Carga horária: 36 hrs

Período letivo: 2026/4

Professor: Diego T. Volpato

Contato: volpato@lncc.br

Ementa

Visão geral do Método de Elementos Finitos e Método de Galerkin; Representação e Estrutura de Dados de Malhas; Tipos de Elementos, Funções de Base e Elementos de Referência; Quadratura Numérica; Montagem de Sistemas Algébricos resultantes, mapeamento local-global e aplicação de condições de contorno; Solucionamento de Sistemas Lineares via Métodos Diretos e Iterativos; Verificação da Implementação e avaliação de Taxas de Convergência; Aplicações e Pacotes Computacionais: Problemas de Poisson e Advecção-Difusão solucionados com as bibliotecas FEniCS, Firedrake e NGSolve.

Objetivos Gerais

Ensinar aos participantes técnicas de implementação de Elementos Finitos (FEM) básicas, partindo da formulação clássica do Método de Galerkin. Os discentes serão introduzidos aos conceitos básicos de desenvolvimento científico e técnicas típicas para implementação de métodos de Elementos Finitos, provendo a capacidade de implementar um pacote de FEM desde o início. Além disso, os participantes serão introduzidos às ferramentas do estado da arte para implementação de FEM, como Firedrake e FEniCS.

Objetivos Específicos

Ao final da disciplina, o discente deverá ser capaz de:

- Entender e utilizar práticas e técnicas de desenvolvimento científico para FEM;

- Compreender as diferentes etapas e componentes para implementação de um código de Elementos Finitos;
- Aplicar e solucionar problemas de Equações Diferenciais Parciais com FEM.

Conteúdo Programático

1. Revisão e Introdução
 - 1.1. Conceitos básicos do Método de Elementos Finitos
 - 1.2. Formas Forte e Fraca
 - 1.3. Discretização do Domínio
 - 1.4. Espaços de Aproximação
 - 1.5. Tripla de Ciarlet
2. Ambiente e Workflow para implementação de software científico
 - 2.1. Linguagem Python
 - 2.2. Introdução às bibliotecas científicas de Python
 - 2.3. Ambientes de Desenvolvimento com *Pixi*
 - 2.4. Controle de Versão com *git* e *GitHub*
3. Elementos Finitos em 1D para problemas de Poisson
 - 3.1. Forma Forte e Problema Variacional (Galerkin conforme)
 - 3.2. Discretização da reta e estrutura de dados de malhas
 - 3.3. Aproximações de primeira e segunda ordem
 - 3.4. Elementos de referência e funções de base
 - 3.5. Quadratura Gaussiana
 - 3.6. Montagem do sistema algébrico (mapeamento local-global)
 - 3.7. Aplicação de Condições de Contorno
 - 3.8. Solucionamento do sistema resultante
4. Elementos Finitos em 2D para problemas de Poisson
 - 4.1. Forma Forte e Problema Variacional (Galerkin conforme)
 - 4.2. Discretização do domínio em elementos triangulares
 - 4.3. Discretização do domínio em elementos quadrilaterais
 - 4.4. Aproximação P1 e Mapeamento de Elementos Triangulares Globais para Locais (de referência)
 - 4.5. Aproximação Q1 e Mapeamento de Elementos Quadrilaterais Globais para Locais (de referência)

- 4.6. Montagem do sistema resultante e Condições de Contorno
- 4.7. Comentários sobre aproximações de alta ordem e serendipidade
- 5. Solucionadores
 - 5.1. Métodos Diretos vs Iterativos (Gradiente Conjugado e GMRES)
 - 5.2. Pré-condicionadores (Jacobi/ILU)
- 6. Verificação de Código
 - 6.1. Método das Soluções Manufaturadas
 - 6.2. Erros L2/H1 vs Tamanho da Malha (taxa de convergência)
 - 6.3. (Opcional) Erros L2 vs Grau de Aproximação
- 7. (Opcional) Tópicos Avançados
 - 7.1. Comentários sobre Métodos Mistos
 - 7.2. Comentários sobre problemas de campos vetoriais
 - 7.3. Comentários sobre problemas de Advecção-Difusão
- 8. Pacotes Científicos de Elementos Finitos
 - 8.1. Discretização: Gmsh, Netgen e meshio
 - 8.2. Firedrake
 - 8.3. FEniCS
 - 8.4. (Opcional) NGSolve
- 9. Projeto Final

Metodologia de Ensino e Aprendizagem

O conteúdo do curso será apresentado majoritariamente via *slides*, com partes realizadas utilizando apresentações com *Jupyter Notebook* e demonstrações práticas de código. Os discentes serão amplamente incentivados a realizar atividades práticas durante o curso, entregando listas de exercícios manuais e trabalhos pontuais de código (ao longo do curso) e projeto final.

As aulas serão ministradas em sala de aula regular e no laboratório de informática conforme necessário de acordo com o conteúdo. A presença será contabilizada ao início de cada aula. Toda a gestão e comunicação da turma serão feitas via *Google Classroom*, sendo os trabalhos pontuais realizados no *GitHub*.

Semanalmente são disponibilizados atendimentos individualizados ou em grupo aos alunos de forma presencial, sendo possível a realização de atendimento *online* (via Google Meet) se justificado. O agendamento dos horários deve ser realizado com o professor via

e-mail, com antecedência de no mínimo 24h (1 dia). Ressalta-se que os atendimentos individuais ou em grupo online são realizados preferencialmente com câmera e microfone ativados para melhor interação entre o docente e discentes.

Sistema de Avaliação

Os discentes serão avaliados a partir de três tipos de dispositivos de verificação de aprendizado:

- Trabalhos Pontuais (TP): Atividades realizadas ao longo do curso, relacionadas a conteúdos recém-apresentados, podendo ser listas de exercícios manuais ou trabalhos de implementação de código, com prazos determinados;
- Projeto Final de Curso (PF): Trabalho expositivo individual – a ser apresentado ao final do curso – pelos discentes aplicando um pacote de Elementos Finitos (Firedrake, FEniCS, etc) em um problema de interesse escolhido por cada discente.

Cada dispositivo de avaliação mencionado acima receberá uma nota de 0 a 10, sendo os TPs pontuados individualmente, com a nota geral do TP calculada a partir da média simples. A nota final da disciplina será dada pela média ponderada:

$$Nota\ Final = \frac{40 \cdot TP + 60 \cdot PF}{100}.$$

O conceito final será dado conforme a **Tabela 1**, baseando-se no regimento da Pós-Graduação do LNCC. O discente receberá conceito I apenas no caso previsto no **Art. 9 – §1º conforme previsto no Regimento do Programa** (veja em <https://posgrad.lncc.br/pt-br/regimento-do-programa>).

Tabela 1 – Equivalência da Nota Final com Conceito.

Conceito	Nota Final
A	9 – 10
B	7 – 9
C	5 – 7
D	3 – 5
E	0 – 3
I	–

Destaca-se que os dispositivos avaliativos e suas realizações podem ser modificados ou adaptados, podendo ser removido algum dispositivo e, consequentemente, o cálculo das

notas ajustado conforme necessário. Qualquer mudança dessa natureza será justificada e comunicada a todos os participantes da disciplina.

Cronograma das Aulas

As atividades de ensino referentes ao período letivo **2026/4**, com início a partir da data de **24 de setembro de 2026**, seguirão o cronograma de aulas apresentado na **Tabela 2**. O conteúdo previsto para as aulas é descrito na **Tabela 2** de acordo com os tópicos da Seção de “Conteúdo Programático” da disciplina.

Tabela 2 – Cronograma de aulas e conteúdo programático.

Aula	Data	Conteúdo
01	24/09/2026	Plano de Ensino e Visão Geral
02	29/09/2026	1.1 e 1.2
03	01/10/2026	1.3 – 1.5
04	06/10/2026	2.1 e 2.2
05	08/10/2026	2.3 e 2.4
06	13/10/2026	3.1 e 3.2
07	15/10/2026	3.3 e 3.4
08	20/10/2026	3.5 e 3.6
09	22/10/2026	3.7 e 3.8
10	27/10/2026	4.1 e 4.2
11	29/10/2026	4.3
12	03/11/2026	4.4
13	05/11/2026	4.5 e 4.6
14	10/11/2026	5.1
15	12/11/2026	5.2
16	17/11/2026	6.1 e 6.2
17	19/11/2026	7.1 – 7.3
18	24/11/2026	8.1
19	26/11/2026	8.2
20	01/12/2026	8.3
21	03/12/2026	PF: escolha do tema

Aula	Data	Conteúdo
22	08/12/2026	Oficina PF
23	10/12/2026	Oficina PF
–	15/12/2026	Apresentação PF
–	17/12/2026	Apresentação PF

O cronograma apresentado na Tabela 2 pode ser alterado no decorrer das atividades de modo a adequar-se à abordagem pedagógica do curso.

Bibliografia Básica

HAM, D. A.; COTTER, C. J. Finite Elements: Analysis and Implementation. Notas de Aula. Imperial College London, 2024.

GOCKENBACH, Mark S. Understanding and implementing the finite element method. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. Finite Elements: An Introduction. v. 1. Prentice-Hall, 1981.

JOHNSON, Claes. Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Dover, 2009.